УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ: ПРИЛОЖЕНИЯ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия
ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

С одной стороны, воздействие потока может приводить к отрицательным эффектам, являющимся причиной нарушения необходимых функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или частоты колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий (например, гидродинамические излучатели), в частности, устройства для подготовки и подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки. На деформации упругих элементов основано также действие некоторых приборов, например, датчиков для измерения давления рабочей среды.

В работе принято определение устойчивости упругого тела, соответствующее концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала описывается несколькими линейными и нелинейными моделями. В некоторых моделях учитываются тепловое воздействие и (или) эффекты запаздывания внешних воздействий. Изучается устойчивость элементов при различных способах их закрепления при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания. Исследуется устойчивость движения в задачах о динамике летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред.

Исследование устойчивости основано:

1) на построении смешанных функционалов для связанных систем дифференциальных уравнений с частными производными для двух неизвестных функций — деформации элемента и потенциала скорости возмущенного потока жидкости (газа);

2) на построении функционалов для дифференциальных уравнений с частными производными только для функций деформаций элементов после исключения потенциала скорости жидкости (газа);

3) на проведении численного эксперимента с применением метода Галеркина.

В докладе приведены примеры постановок некоторых задач аэрогидроупругости и примеры исследования динамической устойчивости движения упругих элементов конструкций в этих задачах. На основе метода Галеркина проведены численные эксперименты, показавшие удовлетворительное согласование необходимых и достаточных условий, полученных численно, с достаточными условиями, полученными аналитически на основе исследования функционалов.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России.

ПСЕВДОСПЕКТРАЛЬНЫЙ КОНСЕРВАТИВНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Ю.В. Буяльская, В.М. Волков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

julie-comtesse@mail.ru, v.volkov@tut.by

Рассматривается класс нелинейных двухточечных краевых задач, возникающих при математическом моделировании волоконно-оптических усилителей [1]:

$$M\frac{dE}{dz} = [\gamma - G(E)]E, \quad -1 < z < 1, \quad R_m E(-L) = g_m, \quad R_p E(L) = g_p. \tag{1}$$

Здесь $E = (E_1, E_2, \dots E_n)^T$, E_k — комплексные огибающие аплидуды световых волн, M — диагональная матрица, $\{M_{kk}\} = \pm 1$, определяющая направления распространения волн, $G(E)$ — матрица, элементы которой $\{G_{mk}\} = g_{mk}E_k^* E_m$ определяют взаимодействие компонент E_k и E_m, причем $g_{mk} = -g_{km}$, R_m, R_p — матрицы, определяющие краевые условия на левой и правой границах соответственно, γ — постоянная поглощения.

Дискретизация дифференциальной задачи (1) на сетке узлов $z_j = \cos[j\pi/(N-1)]$, $j = \overline{0, N-1}$, с использованием матрицы спектрального дифференцирования Чебышева [2] приводит к системе $N\dot{n}$ нелинейных алгебраических уравнений:

$$(D - F(U))U = \Psi. \tag{2}$$

Здесь $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$, $U_m = (u_m^1, u_m^2, \dots u_m^N)^T$, D — блочно-диагональная матрица, компоненты которой $\{D_{mm}\} = M_{mm}C_m + \gamma I_m$, C_m, $I_m \in R^{N\times N}$ — матрица спектрального дифференцирования Чебышева, и единичная матрица соотвественно, первая или последняя строки которых модифицированы с учетом краевых условий для соотвествующей компоненты E_m, $F(U)$ — блочная матрица, с блоками $F_{mk} = \operatorname{diag}\{g_{mk}U_k^* U_m\} \in C^{N\times N}$. Вектор Ψ определяется краевыми условиями задачи.

Для реализации псевдоспектральной модели (2) предлагается итерационный метод вида

$$(D - F(U^{(s)}))U^{(s+1)} = \Psi, \quad s = 0, 1, \dots, \quad U^{(0)} = 0, \tag{3}$$

для которого имеет место

Лемма. *На каждом шаге итерационного метода* (3) *для задачи при* $\gamma \equiv 0$ *выполняется соотношение*

$$\sum_{m=1}^{n} \left|U_m^{(s)}\right|^2 = \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots \tag{4}$$